

الدرس 3-4 التغير الطردي

السابق ..

الحالي ..

لماذا؟ ..



● أوجدت معدلات تغير الدوال الخطية.

1 اكتب معادلات التغير الطردي ومثلها بيانياً.

2 حل المسائل المشتملة على تغير طردي.

● تدخر أمل المال لشراء حقيبة ذات علامة تجارية تبلغ تكلفتها AED 295. ويساعدها على جمع هذا المال تقاضياها AED 8 في الساعة نظير الاعتناء بطفل الجيران. ميل الخط الذي يمثل مبلغ المال الذي تخرجه أمل هو 8. ومعدل التغير ثابت.

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-4 أوجد معدلات التغير للدوال الخطية.

الدرس 3-4 اكتب معادلات تغير طردي ومثلها بيانياً. حل المسائل المشتملة على تغير طردي.

بعد الدرس 3_4 اكتب معادلة لعلاقة تناسب.

مفردات جديدة

التغير الطردي

(direct variation)

ثابت التغير

(constant of variation)

ثابت التناسب

(constant of proportionality)

ممارسات رياضية

فهم طبيعة المسائل

والمثابرة في حلها.

مراعاة الدقة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** من الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ كم المبلغ المالي الذي يمكن أن تخرجه منى للعمل كجليسة أطفال لمدة 5 ساعات؟ **AED 40**

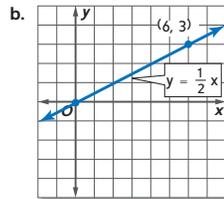
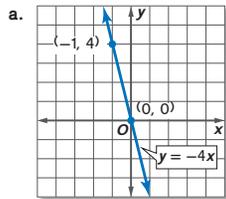
■ كم عدد ساعات العمل التي ستعملها أمل كجليسة أطفال لكي تريح AED 295؟ **37.25 أو حوالي 38 ساعة**

■ إذا لم تتمكن منى من العمل كجليسة أطفال لهذه المدة من الساعات، فما الذي يمكنها فعله لزيادة دخلها؟ **يمكنها تقاضي مقابل مادي أكبر لكل ساعة.**

1 **معادلات التغير الطردي** يوصف **التغير الطردي** بمعادلة صيغتها $y = kx$ حيث $k \neq 0$. تبين المعادلة $y = kx$ معدل تغير ثابتاً، و k هو **ثابت التغير**. ويُطلق عليه أيضاً **ثابت التناسب**.

مثال 1 الميل وثابت التغير

عين ثابت التغير لكل معادلة. ثم أوجد الميل للمستقيم المار بكل زوج من النقاط.



$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$= \frac{3 - 0}{6 - 0}$	$(x_1, y_1) = (0, 0)$ $(x_2, y_2) = (6, 3)$	$= \frac{4 - 0}{-1 - 0}$	$(x_1, y_1) = (0, 0)$ $(x_2, y_2) = (-1, 4)$
$= \frac{1}{2}$	الميل هو $\frac{1}{2}$	$= -4$	الميل هو -4

تمرين موجه

- 1A. عيّن ثابت التغير للمعادلة $y = \frac{1}{4}x$ ثم أوجد ميل المستقيم المار بـ $(0, 0)$ و $(4, 1)$. نقطتان على المستقيم $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
- 1B. عيّن ثابت التغير للمعادلة $y = -2x$. ثم أوجد ميل المستقيم المار بـ $(0, 0)$ و $(1, -2)$. نقطتان على المستقيم. $-2; -2$

ميل التمثيل البياني للمعادلة $y = kx$ هو k . بما أن $k(0) = 0$. فالتمثيل البياني للمعادلة $y = kx$ يمر دائماً بنقطة الأصل. لذلك، التقاطعان مع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y قيمتهما صفر.

1 معادلات التغير الطردي

مثال 1 يوضح كيف يرتبط ثابت التغير لمعادلة معينة بميل الخط.

مثال 2 يوضح كيفية التمثيل البياني لمعادلة بالصيغة $y = kx$ ، حيث $k > 0$ أو $k < 0$. عن طريق التمثيل البياني للنقطة $(0, 0)$ واستخدام التغير الرأسي والأفقي لإيجاد نقطة أخرى على التمثيل البياني.

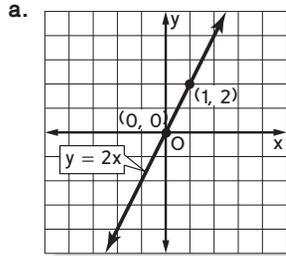
مثال 3 يوضح كيفية استخدام تعريف التغير الطردي لكتابة معادلات تغير طردي وحلها.

التقويم التكويني

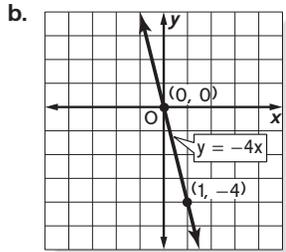
استخدم تمارين "التمرين الموجه" بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 عين ثابت التغير لكل معادلة. ثم أوجد الميل للخط المار بكل زوج من النقاط.



ثابت التغير: 2
الميل: 2

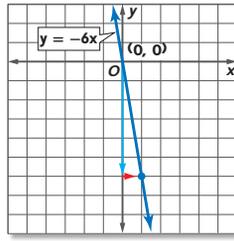


ثابت التغير: -4
الميل: -4

2 مثل بيانيًا المعادلة $y = -\frac{3}{2}x$.
انظر الهامش السفلي.

مثال 2 تمثيل التغير الطردي بيانيًا

مثل بيانيًا $y = -6x$



الخطوة 1 اكتب الميل في صورة نسبة.

$$-6 = \frac{-6}{1} \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

الخطوة 2 مثل النقطة $(0, 0)$ بيانيًا.

الخطوة 3 من النقطة $(0, 0)$ ، تحرك لأسفل 6 وحدات ووحدة واحدة إلى اليمين. ارسم نقطة.

الخطوة 4 ارسم مستقيمًا يحتوي على النقاط.

تمرين موجه

2A-2D. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

2A. $y = 6x$

2B. $y = \frac{2}{3}x$

2C. $y = -5x$

2D. $y = -\frac{3}{4}x$

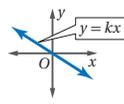
نصيحة دراسية

ثابت التغير سيجب أن يكون موجبًا أو سالبًا. إذا كان موجبًا، فإن الخط يميل إلى اليمين. إذا كان سالبًا، فإن الخط يميل إلى اليسار.

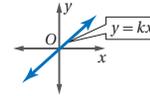
تشارك التمثيلات البيانية لجميع معادلات التغير الطردي في بعض الخصائص العامة.

ملخص المفهوم التمثيلات البيانية للتغير الطردي

- معادلات التغير الطردي تكون بالصيغة $y = kx$ ، حيث $k \neq 0$.
- التمثيل البياني $y = kx$ دائمًا ما يمر بنقطة الأصل.



• يكون الميل سالبًا إذا كان $k < 0$.



• يكون الميل موجبًا إذا كان $k > 0$.

إذا كانت العلاقة بين قيم x و y يمكن وصفها بمعادلة تغير طردي، عندئذ نقول إن y يتغير طرديًا مع x .

مثال 3 كتابة معادلة تغير طردي وحلها

بافتراض أن y يتغير طرديًا مع x ، و $y = 72$ عندما $x = 8$.

a. اكتب معادلة تغير طردي تربط بين x و y .

$$y = kx \\ 72 = k(8) \\ 9 = k$$

صيغة التغير الطردي
عوض y محل 27 و x محل 8.
اقسم كل طرف على 8.

لذا، تصبح معادلة التغير الطردي هي $y = 9x$.

b. استخدم معادلة التغير الطردي لإيجاد x عندما $y = 63$.

$$y = 9x \\ 63 = 9x \\ 7 = x$$

صيغة التغير الطردي
عوض y محل 36
اقسم كل طرف على 9

لذا، $x = 7$ عندما $y = 63$.

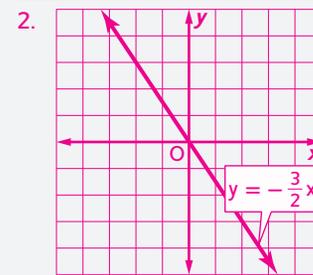
تمرين موجه

3. بافتراض أن y يتغير طرديًا مع x ، و $y = 98$ عندما $x = 14$ ، فاكتب معادلة تغير طردي تربط بين x و y . ثم أوجد y عندما $x = -4$.
 $y = 7x; -28$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية اختر أحد الطلاب لحل مثال أمام الفصل. أعطه قيمة للمحور الأفقي x وقيمة للمحور الرأسي y . واطلب من الطالب إيجاد ثابت التغير مع الوضع في الاعتبار تغير المحور الرأسي y بشكل طردي مع المحور الأفقي x .

إجابة إضافية (أمثلة إضافية)



2 مسائل التغير الطردي أحد أكثر تطبيقات التغير الطردي شيوعاً هو الصيغة $d = rt$. تتغير المسافة d طردياً مع الزمن t . والمعدل r هو ثابت التغير.

مثال 4 من الحياة اليومية التقدير باستخدام التغير الطردي

السفر تتغير المسافة التي تقطعها الطائرة النفاثة طردياً مع عدد الساعات التي تقطعها. قطعت طائرة نفاثة مسافة 3420 ميلاً في 6 ساعات.
a. اكتب صيغة تغير طردي للمسافة d التي تم قطعها في الزمن t .

الشرح	المسافة	يساوي	معدل	مضروباً في	الزمن
المتغير	افترض أن $r =$ المعدل.				
المعادلة	3420	=	r	×	6

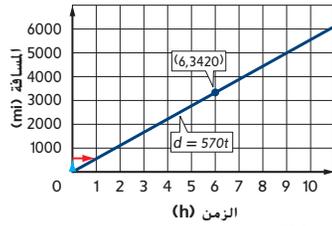
حل المعادلة لإيجاد المعدل.

$$3420 = r(6) \text{ المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{3420}{6} = \frac{r(6)}{6} \text{ اقسم كل طرف على 6.}$$

$$570 = r \text{ حوّل لأبسط صورة.}$$

المسافة المقطوعة جواً



لذلك، تصبح معادلة التغير الطردي هي $d = 570t$. حلقت الطائرة بمعدل 570 ميلاً في الساعة.

b. مثّل المعادلة بيانياً.

التمثيل البياني لـ $d = 570t$ يمر بنقطة الأصل بميل 570.
التغير الرأسي
التغير الأفقي
 $m = \frac{570}{1}$

c. قّدّر عدد الساعات التي ستستغرقها الطائرة لطيران 6500 ميل.

$$d = 570t \text{ المعادلة الأصلية}$$

$$6500 = 570t \text{ عوّض } d \text{ محل 6500.}$$

$$\frac{6500}{570} = \frac{570t}{570} \text{ اقسم كل طرف على 570.}$$

$$t \approx 11.4 \text{ حوّل لأبسط صورة.}$$

سوف تستغرق الطائرة 11.4 ساعة تقريباً لطيران 6500 ميل.

تعزيز موجه

4. **المناطيد** يتغير ارتفاع المنطاد طردياً مع زمن صعود المنطاد بالدقائق.

- A. اكتب تغيراً طردياً للمسافة d التي صعدتها المنطاد في الزمن t . $d = 70t$
B. مثّل المعادلة بيانياً. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.
C. قّدّر عدد الدقائق التي يستغرقها المنطاد لوصول 2100 قدم. 30 min.
D. كم عدد الدقائق تقريباً التي يستغرقها المنطاد للوصول للعدد 3500 قدم؟ 50 min.



رابط من الحياة اليومية

في عام 2006، نقلت خطوط جوية محلية ما يزيد عن 660 مليون راكب بمتوسط مسافة 724 ميلاً في الرحلة الجوية.
المصدر: إحصائيات مكتب النقل

نصيحة في حل المسائل

الدقة لاحظ أن السؤال يسأل عن تقدير وليس إجابة دقيقة.

مثال إضافي

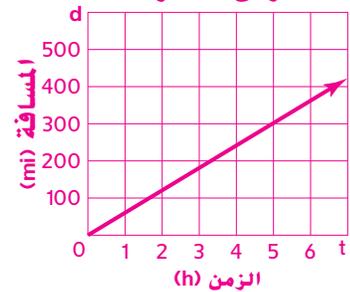
- 3 افترض أن y يتغير طردياً مع x .
و $y = 9$ عندما يكون $x = -3$.
a. اكتب معادلة تغير طردي تربط بين x و y . $y = -3x$
b. استخدم معادلة التغير الطردي لإيجاد x عندما يكون $y = 15$. -5

2 مسائل التغير الطردي

يوضح المثال 4 كيفية استخدام معادلة التغير الطردي لحل مسألة من الحياة اليومية.

مثال إضافي

- 4 **السفر** تسافر عائلة زيد بين الإمارات في العطلة. ويقودون السيارة لمسافة 330 ميلاً في 5.5 ساعات.
a. اكتب معادلة تغير طردي لإيجاد المسافة d التي يقطعونها بالسيارة في الزمن t . $d = 60t$
b. مثّل المعادلة بيانياً.

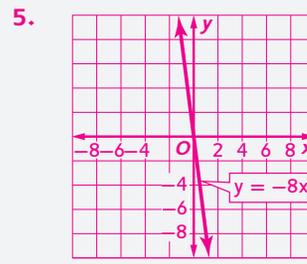
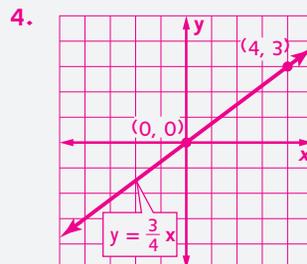
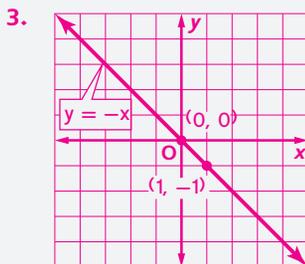


C. قّدّر عدد الساعات التي تستغرقها قيادة السيارة لمسافة 500 ميل. حوالي 8.3 h

تدريس الممارسات الرياضية

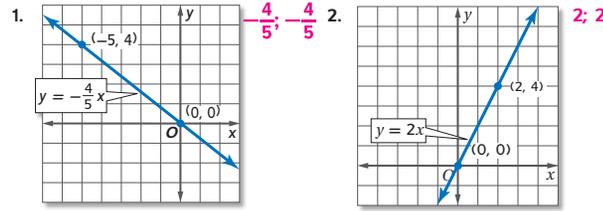
الدقة بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات الحساب بدقة وكفاءة والتعبير عن الإجابات الرقمية بدرجة من الدقة تناسب سياق المسألة. وضح للطلاب أنه يمكن عمل تقدير تقريبي عن طريق ملاحظة أن 6500 ميل أقل بمقدار الضعف من 3420 ميلاً. لذا فإن الوقت لا بد أن يقل عن 6 ساعات بمقدار الضعف.

إجابات إضافية



مثال 1

عين ثابت التغيير لكل معادلة. ثم أوجد الميل للمستقيم المار بكل زوج من النقاط.



مثال 2

مثّل كل معادلة بيانيًا. 3-6. انظر الهامش.

3. $y = -x$ 4. $y = \frac{3}{4}x$ 5. $y = -8x$ 6. $y = -\frac{8}{5}$

مثال 3

بافتراض أن y يتغير طرديًا مع x . فاكتب معادلة تغير طردي تربط بين x و y . ثم قم بحلها.

7. إذا كان $y = 15$ عندما يكون $x = 12$. فأوجد قيمة y عندما يكون $x = 32$. $y = \frac{5}{4}x; 40$
8. إذا كان $y = -11$ عندما يكون $x = 6$. فأوجد قيمة x عندما يكون $y = 44$. $y = -\frac{11}{6}x; -24$

مثال 4

9. الاستنتاج أنت وجدت أن عدد الرسائل التي تستلمها على لوحة الرسائل تغير طرديًا مع عدد الرسائل التي تنشرها. عندما تنشر 5 رسائل، فأنت تستلم 12 رسالة في المقابل.

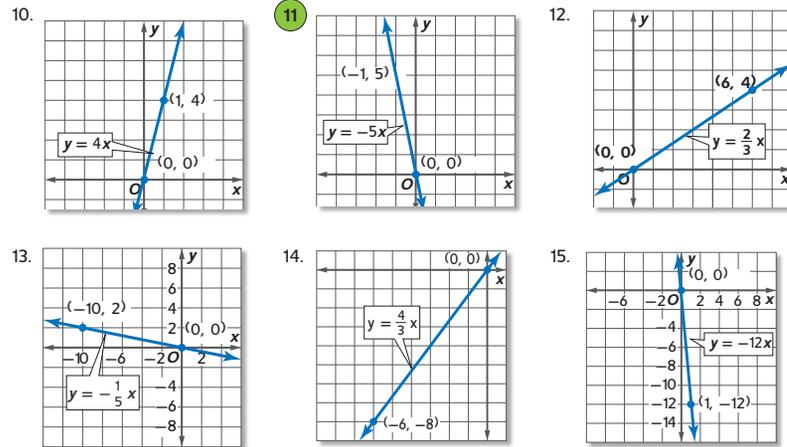
a. اكتب معادلة تغير طردي تربط بين منشوراتك والرسائل المستلمة. ثم مثّل المعادلة بيانيًا. $y = \frac{12}{5}x$; انظر الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.

b. أوجد عدد الرسائل التي تحتاج إلى نشرها لتستلم 96 رسالة. 40

التمرين وحل المسائل

مثال 1

عين ثابت التغيير لكل معادلة. ثم أوجد الميل للمستقيم المار بكل زوج من النقاط. 10-15. انظر الهامش.



185

انتبه!

تجنّب الأخطاء تأكد من عدم تبديل الطلاب لقيم x و y عند التعويض عنها في معادلة معينة.

تنبيه التمرين

ورق التمثيل البياني سيحتاج الطلاب إلى ورق تمثيل بياني للإجابة عن التمارين 6، 9، 16-23، 28، 38-41، 47-3

3 تمرين

التقييم التكويني

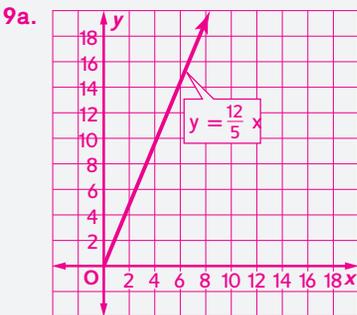
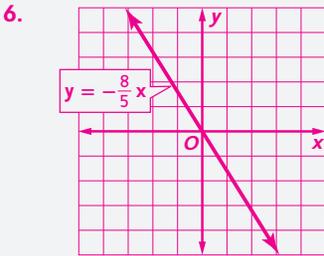
استخدم التمارين 1-9 للتحقق من الاستيعاب.

استخدم المخطط أسفل الصفحة التالية لتخصيص المهام للطلاب.

تدريس الممارسات الرياضية

الاستنتاج على الطلاب المتفوقين في الرياضيات الانتباه إلى دلالة الكميات. في التمرين 9، شجع الطلاب على البدء بتحديد المتغيرات.

إجابات إضافية



10. 4; 4 11. -5; -5
12. $\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$ 13. $-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}$
14. $\frac{4}{3}; \frac{4}{3}$ 15. -12; -12

إذا يجد الطلاب صعوبة في معادلات التغير الطردي،

عندئذ أعط الطلاب دالة واحدة في كل مرة. اطلب منهم قراءة الدالة بصوت عالٍ، ثم حدد ما إذا كانت الدالة تمثل تغيرًا طرديًا أم لا. وإذا كانت كذلك، فاطلب من الطلاب إيجاد ثابت التغير.

مثال 2

16. $y = 10x$ 17. $y = -7x$ 18. $y = x$ 19. $y = \frac{7}{6}x$
 20. $y = \frac{1}{6}x$ 21. $y = \frac{2}{9}x$ 22. $y = \frac{6}{5}x$ 23. $y = -\frac{5}{4}x$

بافتراض أن y يتغير طرديًا مع x . فاكتب معادلة تغير طردي تربط بين x و y . ثم قم بحلها.

24. إذا كان $y = 6$ عندما $x = 10$. فأوجد قيمة x عندما $y = 18$. $y = \frac{3}{5}x$; 30
 25. كان $y = 22$ عندما $x = 8$. فأوجد قيمة y عندما $x = -16$. $y = -\frac{11}{4}x$; -44
 26. إذا كان $y = 4$ عندما $x = \frac{3}{4}$. فأوجد y عندما $x = 4\frac{1}{2}$. $y = 5\frac{2}{3}x$; 25
 27. إذا كان $y = 12$ عندما $x = \frac{6}{7}$. فأوجد قيمة x عندما $y = 16$. $y = 14x$; 1

مثال 3

مثال 4

ضرب كرة الجولف		
الارتفاع (ft)	0	7,000
المسافة (yd)	200	210

28. **الرياضة** المسافة التي تقطعها كرة الجولف بارتفاع 7000 قدم تنغير طرديًا مع المسافة التي تقطعها الكرة عند مستوى البحر كما هو موضح.

a. اكتب معادلة تربط بين المسافة التي تقطعها كرة الجولف بارتفاع 7000 قدم y والمسافة التي تقطعها عند مستوى البحر x . ثم مقلها بيانياً. $y = 1.05x$; انظر ملحق إجابات الوحدة 3

b. ماذا سيكون متوسط مسافة القيادة التي يقطعها شخص عند ارتفاع 7000 قدم إذا كان متوسط مسافة قيادته عند مستوى البحر 180 ياردة؟ $189 yd$

29. **المعرفة المالية** الانخفاض في السعر هو انخفاض في قيمة السيارة خلال مدة من الزمن. يبين الجدول أدناه قيم سيارة بمتوسط انخفاض سعر.

عمر السيارة (بالأعوام)	1	2	3	4	5
القيمة (AED)	12,000	10,200	8,400	6,600	4,800

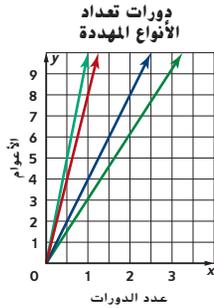
- a. اكتب معادلة تربط بين عمر x للسيارة وقيمة y التي فقدتها بعد كل عام. $y = 1800x$
 b. أوجد عمر السيارة إذا كانت قيمتها 300 AED. $7 \text{ yr } 6 \text{ mo}$

بافتراض أن y يتغير طرديًا مع x . فاكتب معادلة تغير طردي تربط بين x و y . ثم قم بحلها.

30. إذا كان $y = 3.2$ عندما $x = 1.6$. فأوجد y عندما $x = 19$. $y = 2x$; 38
 31. إذا كان $y = 15$ عندما $x = \frac{3}{4}$. فأوجد x عندما $y = 25$. $y = 20x$; $\frac{5}{4}$
 32. إذا كان $y = 4.5$ عندما $x = 2.5$. فأوجد y عندما $x = 12$. $y = 1.8x$; 21.6
 33. إذا كان $y = -6$ عندما $x = 1.6$. فأوجد y عندما $x = 8$. $y = -3.75x$; -30

الاستنتاج المنطقي تشهد أنواع معينة مهددة بالانقراض دورات في تعدادها كما يظهر في التمثيل البياني على اليسار. صل كل حيوان أدناه بأحد الخطوط الملونة في التمثيل البياني.

34. الدجاج البري الأحمر. 8 أعوام في الدورة **أحمر**
 35. فأر الحقل. 3 أعوام في الدورة **أخضر داكن**
 36. اللاموس. 4 أعوام في الدورة **أزرق**
 37. الوشق. 10 أعوام في الدورة **أخضر ليموني**



التمثيلات المتعددة

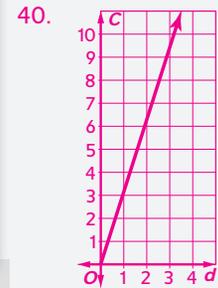
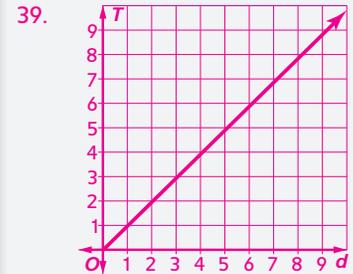
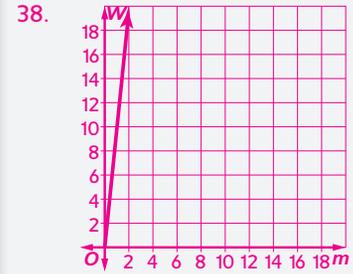
في التمرين 41، سيبحث الطلاب عن العلاقة بين ثابت التغير، والميل ومعدل التغير.

تدريس الممارسات الرياضية

الاستنتاج المنطقي يظل الطلاب المتفوقون في الرياضيات يسألون أنفسهم "هل هذا مقبول؟" في التمارين 34-37. ناقش كيفية مقارنة تمثيل بياني يشمل المزيد من الأعوام لكل دورة مع تمثيل بياني يشمل أعوامًا أقل لكل دورة.

البنية في التمرين 48، شجّع الطلاب على استخدام المعادلة $y = kx$ وافحص تأثير ضرب x في 2.

إجابات إضافية



48. ودائمًا؛ إذا كانت المعادلة هي $y = kx$ ($k \neq 0$). فستكون قيمة y عندما يكون $x = a$ هي ka . وستكون قيمة y عندما يكون $x = 2a$ هي $k(2a)$.

49. لا هذا ولا ذلك؛ الميل ثابت وهو k .
 50. الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لمعادلة التغير الطردي $y = kx$ هو خط يمر دائمًا بنقطة الأصل.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

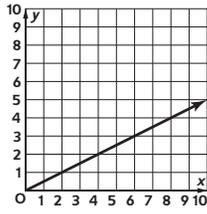
المستوى	المهمة	خيار اليومين
AL مبتدئ	10-29, 45-47, 49-73	10-32 زوجي 45-47, 49, 50 55-73
OL أساسي	11-37, 35, 38-47, 49-73	34-47, 49, 50, 55-73
BL متقدم	30-67, (اختياري: 68-73)	

4 التقويم

الكرة السحرية أخبر الطلاب بأن الدرس التالي الذي سيدرسونه سيكون عن ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية. اطلب منهم كتابة كيف يعتقدون أن درس اليوم حول المعادلة الخاصة بالتغير الطردي سيرتبط بالدرس التالي الذي سيدرسونه.

تمرين على الاختبار المعياري

53. ما العلاقة بين المدخل (x) والمخرج (y)؟ D



A المخرج أكثر من المدخل باثنين.

B المخرج أقل من المدخل باثنين. H

C المخرج ضعف المدخل.

D المخرج نصف المدخل.

54. **إجابة قصيرة** تتقاضى شركة هواتف AED 40 نظير قيمة الاشتراك الشهري بالإضافة إلى 0.07 AED لكل دقيقة. فكم سيدفع عميل تكلفة شهر من الخدمة إذا تحدث 200 دقيقة؟
54 AED

51. تدفع عمير 1.19 AED لتنزيل نشيد واحد إلى مشغل الوسائط الرقمي الخاص بها. فإذا كان n هو عدد الأناشيد التي تم تنزيلها، فأى معادلة تمثل التكلفة C بالدرهم الإماراتية؟ A

A $C = 1.19n$

B $n = 1.19C$

C $C = 1.19 \div n$

D $C = n + 1.19$

52. بافتراض أن y يتغير طرديًا مع x ، و $y = 8$ عندما $x = 6$ ، ما قيمة y عندما $x = 8$ ؟

F 6

G 12

H $10\frac{2}{3}$

J 16

مراجعة شاملة



55. **التلفزيون** يعرض التمثيل البياني متوسط عدد القنوات التلفزيونية التي تستقبلها الأسر الإماراتية. فماذا كان معدل التغير السنوي من 2004 إلى 2008؟ فسر دلالة معدل التغير. (الدرس 3-3)

6.5؛ كان هناك متوسط زيادة قدره 6.5 قناة لكل عام.

حل كل معادلة فيما يلي عن طريق التمثيل البياني. (الدرس 3-2)

56. $0 = 18 - 9x$ 2

57. $2x + 14 = 0$ -7

58. $-4x + 16 = 0$ 4

59. $-5x - 20 = 0$ -4

60. $8x - 24 = 0$ 3

61. $12x - 144 = 0$ 12

أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $a = 4$ ، $b = -2$ و $c = -4$. (الدرس 2-5)

62. $|2a + c| + 1$ 5

63. $4a - |3b + 2|$ 12

64. $-|a + 1| + |3c|$ 7

65. $-a + |2 - a|$ -2

66. $|c - 2b| - 3$ -3

67. $-2|3b - 8|$ -28

مراجعة المهارات

أوجد فرق كل مما يلي.

68. $13 - (-1)$ 14

69. $4 - 16$ -12

70. $-3 - 3$ -6

71. $-8 - (-2)$ -6

72. $16 - (-10)$ 26

73. $-8 - 4$ -12

188 | الدرس 3-4 | التغير الطردي

التعليم المتميز BL

التوسع اكتب $y = kx^2$ على اللوحة. أخبر الطلاب بأن y يتغير طرديًا مع تربيع x ، و $y = 48$ عندما $x = 4$. اطلب من الطلاب إيجاد y عندما $x = 10$. بما أن $y = 300$ ، $k = 3$.